ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHÙNG VĂN THÀNH

VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ĐỒNG BỘ HÓA CỦA HỆ NƠ RON PHÂN THỨ HOPFIELD

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

---------------- ---------------

PHÙNG VĂN THÀNH

VỀ TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ ĐỒNG BỘ HÓA CỦA HỆ NƠ RON PHÂN THỨ HOPFIELD

Chuyên ngành: Toán ứng dụng
Mã số : 8 46 01 12

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. Mai Viết Thuận

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

LỜI NÓI ĐẦU

Mô hình mạng nơ ron Hopfield mô tả bởi hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên được nghiên cứu đầu tiên bởi Chua và Yang vào năm 1988 (xem [5]). Mô hình này đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học trong những năm gần đây do những ứng dụng rộng lớn của nó trong xử lí tín hiệu, xử lí hình ảnh, tối ưu hóa và các lĩnh vực khác [3, 6, 14]. Năm 2008, trong một nghiên cứu của mình, Boroomand và Menhaj [3] lần đầu tiên mô hình hóa mạng nơ ron Hopfield bởi hệ phương trình vi phân phân thứ (Caputo hoặc Riemann–Liouville). So với mạng nơ ron Hopfield mô tả bởi hệ phương trình vi phân với đạo hàm bậc nguyên, mạng nơ ron Hopfield mô tả bởi hệ phương trình vi phân phân thứ (Caputo hoặc Riemann–Liouville) có thể mô tả các đặc tính và tính chất của mạng nơ ron một cách chính xác hơn [3, 14]. Như chúng ta đã biết, tính ổn định là một trong những tính chất cơ bản và quan trọng của mọi hệ động lực và mạng nơ ron phân phân thứ Hopfield cũng không là ngoại lệ. Do đó bài toán nghiên cứu tính ổn định của hệ nơ ron Hopfield phân thứ đã nhận được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà khoa học và nhiều kết quả thú vị và sâu sắc đã được công bố trên các tạp chí quốc tế có uy tín trong những năm gần đây (xem [15, 17, 18, 20, 21, 22]).

Như chúng ta đã biết phương pháp hàm Lyapunov là một phương pháp hiệu quả để nghiên cứu tính ổn định của hệ nơ ron Hopfield với bậc nguyên. Năm 2010, Li [12] cùng các cộng sự đưa ra phương pháp hàm Lyapunov hay còn gọi là phương pháp trực tiếp Lyapunov để nghiên cứu tính ổn định của hệ phương trình vi phân phân thứ phi tuyến. Tuy nhiên khó khăn trong việc áp dụng phương pháp hàm Lyapunov cho hệ phương trình vi phân phân thứ là xây dựng hàm Lyapunov thích hợp và tính đạo hàm phân thứ của hàm

Lyapunov này. Năm 2015, Duarte-Mermoud [8] cùng các cộng sự đưa ra một công thức để ước lượng đạo hàm phân thứ cấp $\alpha \in (0,1)$ của hàm Lyapunov dạng $V(x(t)) = x^T(t)Px(t), x(t) \in \mathbb{R}^n$, trong đó $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ là một ma trận đối xứng, xác định dương. Dựa trên kết quả này và bất đẳng thức ma trận tuyến tính, các tác giả trong [22] nghiên cứu tính ổn định của hệ nơ ron Hopfield phân thứ. Gần đây, bằng cách tiếp cận sử dụng bổ đề S và bất đẳng thức ma trận tuyến tính, các tác giả trong [18] đưa ra một vài tiêu chuẩn cho tính ổn định của một lớp hệ nơ ron Hopfield phân thứ với hàm kích hoạt mở rộng. Tuy nhiên, hàm Lyapunov được chọn để nghiên cứu tính ổn định của hệ nơ ron Hopfield phân thứ trong các công trình [18, 22] còn đơn giản. Gần đây, Wang cùng các cộng sự [16] đã đưa ra cách chọn hàm Lyapunov hữu hiệu hơn để nghiên cứu tính ổn định của hệ nơ ron Hopfield phân thứ. Ngoài ra, tác giả còn đưa ra một số tiêu chuẩn cho tính đồng bộ hóa của mạng nơ ron phân thứ.

Luận văn tập trung trình bày tính ổn định và đồng bộ hóa cho hệ nơ ron Hopfield phân thứ trên cơ sở đọc hiểu và tổng hợp các kết quả trong bài báo [16] của Wang cùng các cộng sự được công bố năm 2019. Luận văn gồm có 2 chương gồm những nội dung sau đây:

Trong Chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm về giải tích phân thứ như tích phân và đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, tích phân và đạo hàm phân thứ Caputo. Sau đó, chúng tôi trình bày một số định lí tồn tại và duy nhất nghiệm. Cuối chương, chúng tôi trình bày một số bổ đề bổ trợ. Nội dung chính của chương này được tham khảo chủ yếu từ các tài liệu [8, 10, 11].

Trong Chương 2 của luận văn, chúng tôi trình bày một số điều kiện đủ cho tính ổn định của hệ nơ ron Hopfield phân thứ bằng cách xây dựng hàm Lyapunov lồi và cách tiếp cận sử dụng bất đẳng thức ma trận tuyến tính. Ngoài ra, bài toán đồng bộ hóa cho mạng nơ ron phân thứ cũng được chúng tôi trình bày trong chương này. Nội dung của chương này được chúng tôi tham khảo trong tài liệu [16]. Ngoài ra, trong chương này, chúng tôi đưa ra 03 ví dụ số minh họa cho các kết quả lý thuyết trong chương này. Đây có thể coi là đóng góp mới của luận văn.

Luận văn này được thực hiện tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái

Nguyên và hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Tiến sĩ Mai Viết Thuận. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc tới người hướng dẫn khoa học của mình. Người đã đặt vấn đề nghiên cứu, dành nhiều thời gian hướng dẫn, tận tình dìu dắt và chỉ bảo tôi trong suốt quá trình thực hiện đề tài này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban giám hiệu trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, Ban chủ nhiệm khoa Toán – tin cùng các giảng viên đã tham gia giảng dạy, đã tạo mọi điều kiện tốt nhất để tôi học tập và nghiên cứu.

Đồng thời tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình thân yêu,cảm ơn những người bạn thân thiết đã chăm sóc động viên khích lệ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu. Sau cùng tôi xin kính chúc toàn thể quý thầy cô trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên thật dồi dào sức khỏe, niềm tin để tiếp tục thực hiện sứ mệnh cao đẹp của mình là truyền đạt tri thức cho thế hệ mai sau. Xin chân thành cảm ơn.

Danh mục ký hiệu

$\mathbb{R}^n$	không gian vec tơ thực Euclide n chiều
$A^\top$	ma trận chuyển vị của ma trận A
I	ma trận đơn vị
$\lambda(A)$	tập hợp tất cả giá trị riêng của ma trận A
$\lambda_{\max}(A)$	$= \max\{Re\lambda : \lambda \in \lambda(A)\}$
$\|A\|$	chuẩn phổ của ma trận A, $\|A\| = \sqrt{\lambda_{\max}(A^\top A)}$
$A \geq 0$	ma trận A nửa xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
$A \geq B$	nghĩa là $A - B \geq 0$
$A > 0$	ma trận A xác định dương, tức là $\langle Ax, x\rangle > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$
$LMIs$	bất đẳng thức ma trận tuyến tính (Linear matrix inequalities)
$\|x\|$	chuẩn Euclide của véc tơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{n\times r}$	không gian các ma trận thực cỡ $(n \times r)$
$C([a,b], \mathbb{R}^n)$	không gian các hàm liên tục trên$[a,b]$ nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$
$AC^m[a,b]$	không gian các hàm tuyệt đối liên tục cấp m trên$[a,b]$
${}_{t_0}I_t^\alpha$	toán tử tích phân phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{RL}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Riemann - Liouville cấp α
${}_{t_0}^{C}D_t^\alpha$	toán tử đạo hàm phân thứ Caputo cấp α
$\Gamma(x)$	hàm Gamma
$E_{\alpha,\beta}$	hàm Mittag-Leffler hai tham số
$\lceil\alpha\rceil$	số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α
$L = \mathrm{diag}\{l_1, l_2, l_3\}$	$L = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix}$

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả về tính ổn định và ổn định hóa của các hệ phương trình vi phân thường. Chúng tôi cũng trình bày một số kết quả bổ trợ sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả chính của luận văn cho các chương sau. Kiến thức sử dụng ở chương này được tham khảo ở [7, 8, 10, 11].

1.1. Giải tích phân thứ

1.1.1. Tích phân phân thứ

Trong mục này, chúng tôi trình bày sơ lược về khái niệm tích phân phân thứ. Khái niệm tích phân phân thứ là một mở rộng tự nhiên của khái niệm tích phân lặp thông thường.

Định nghĩa 1.1. ([11]) Cho $\alpha > 0$ và $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tích phân phân thứ Riemann-Liouville cấp α của hàm $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{\alpha-1}x(s)ds, \quad t \in (a, b],$$

trong đó $\Gamma(.)$ là hàm Gamma xác định bởi $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt, \alpha > 0$.

Trong Định nghĩa 1.1 khi $\alpha = 0$, chúng ta quy ước $_{t_0}I_t^{\alpha} := I$ với I là toán tử đồng nhất. Sự tồn tại của tích phân phân thứ Riemann–Liouville cấp α với $0 < \alpha < 1$ được cho bởi định lý sau:

Định lý 1.1. ([11]) *Giả sử $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ là một hàm khả tích trên $[a, b]$. Khi* *đó, tích phân ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t)$ tồn tại với hầu hết $t \in [a,b]$. Hơn nữa, ${}_{t_0}I_t^{\alpha}x$ cũng là một hàm khả tích.*

Ví dụ sau đây cho ta tích phân phân thứ của một số hàm cơ bản.

Ví dụ 1.1. ([11])
(i) Cho $x(t) = (t-a)^{\beta}$, ở đây $\beta > -1$ và $t > a$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\alpha+\beta}, \quad t > a. $$

(ii) Cho $x(t) = e^{\lambda t}, \lambda > 0$. Với bất kì $\alpha > 0$, chúng ta có

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha}x(t) = \lambda^{-\alpha}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^{\alpha+j}}{\Gamma(\alpha+j+1)}, \quad t > 0. $$

1.1.2. Đạo hàm phân thứ

Mục này trình bày một cách ngắn gọn về đạo hàm Riemann–Liouville và đạo hàm Caputo. Đây là hai loại đạo hàm được sử dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực.

Định nghĩa 1.2. ([11]) Cho trước một số thực dương α và một khoảng $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ được cho bởi

$$ {}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}x(t) := \frac{d^n}{dt^n}\left[{}_{t_0}I_t^{n-\alpha}x(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1}x(s)ds, $$

trong đó $n := \lceil \alpha \rceil$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng α và $\frac{d^n}{dt^n}$ là đạo hàm thông thường cấp n.

Ví dụ 1.2. Cho hàm bước đơn vị (unit-step function)

$$ f(t) = \begin{cases} 1, \text{nếu} \quad t \geq 0, \\ 0, \text{nếu} \quad t < 0. \end{cases} $$

Bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.2, ta tính đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville cấp α của hàm $f(t)$ là

$$ {}_{0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

Trước khi trình bày điều kiện cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville, chúng tôi nhắc lại một số kết quả sau.

Cho $[a, b]$ là một khoảng hữu hạn trong $\mathbb{R}$. $AC[a, b]$ là không gian các hàm tuyệt đối liên tục trên $[a, b]$. Kolmogorov và Fomin đã chỉ ra mối liên hệ giữa các hàm tuyệt đối liên tục và các hàm khả tích Lebesgue như sau:

$$f(t) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(s)ds \quad (\varphi(s) \in L(a, b)),$$

do đó một hàm tuyệt đối liên tục $f(t)$ có đạo hàm $f'(t) = \varphi(t)$ hầu khắp nơi trên $[a, b]$.

Với $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa lớp hàm $AC^n[a, b]$ như sau:

$$AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, (D^{n-1}f)(t) \in AC[a, b] \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)\}.$$

Mệnh đề sau đây cho ta một số đặc tính của lớp hàm $AC^n[a, b]$.

Mệnh đề 1.1. ([11]) *Không gian $AC^n[a, b]$ chứa tất cả các hàm $f(t)$ có dạng như sau:*

$$f(t) = {}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k(t - t_0)^k,$$

trong đó $\varphi(t) \in L(a, b), c_k(k = 0, 1, \ldots, n - 1)$ là các hằng số tùy ý và

$${}_{t_0}I_t^{\alpha}\varphi(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^t (t - s)^{n-1}\varphi(s)ds.$$

Ngoài ra, từ các điều kiện trên ta có

$$\varphi(s) = f^{(n)}(s), \quad c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!}(k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Định lý sau đây cho ta một tiêu chuẩn cho sự tồn tại của đạo hàm phân thứ Riemann–Liouville.

Định lý 1.2. ([11]) *Cho $\alpha \geq 0, n = [\alpha] + 1$. Nếu $f(t) \in AC^n[a, b]$, khi đó đạo hàm phân thứ ${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t)$ tồn tại hầu khắp nơi trên $[a, b]$ và có thể được biểu diễn dưới dạng sau*

$${}_{t_0}^{RL}D_t^{\alpha}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t_0)}{\Gamma(1 + k - \alpha)}(t - t_0)^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)}\int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(s)ds}{(t - s)^{\alpha-n+1}}.$$